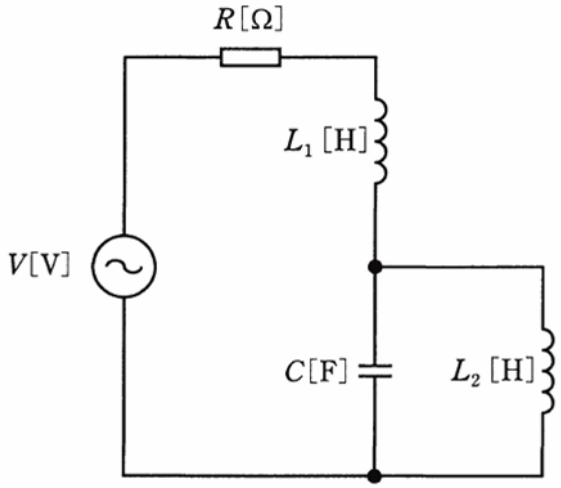
2016 問 9　共振

図のように，R = 1 Ω の抵抗，インダクタンス L_1 = 0.4 mH，L_2 = 0.2 mH のコイル，及び静電容量 C = 8 μF のコンデンサからなる直並列回路がある。
この回路に交流電圧 V = 100 V を加えたとき，
回路のインピーダンスが極めて小さくなる直列共振角周波数 ω_1 の値[rad/s] 及び、
回路のインピーダンスが極めて大きくなる並列共振角周波数 ω_2 の値[rad/s] の組合せとして，最も近いものを次の(1)～(5)のうちから一つ選べ。



	ω_1	ω_2
(1)	2.5×10^4	3.5×10^3
(2)	2.5×10^4	3.1×10^4
(3)	3.5×10^3	2.5×10^4
(4)	3.1×10^4	3.5×10^3
(5)	3.1×10^4	2.5×10^4

解説

ω_2 のほうが答えを求めやすいので、ω_2から求めていきます。

並列共振角周波数 ω_2 を求める

この場合、並列部分の共振角周波数を求めればいいことになります。
したがって、C と L_2 の共振角周波数を求めます。(ここでは L_1 は考慮しない)
並列共振角周波数を求める式 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ に $C=8\times10^{-6}$, $L_2=0.2\times10^{-3}$ を代入する。

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{0.2\times10^{-3}\times8\times10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{1.6\times10^{-9}}} = \frac{1}{\sqrt{16\times10^{-10}}} = \frac{1}{4\times10^{-5}}$$

$$= 0.25\times10^5 = 2.5\times10^4$$

直列共振角周波数ω_1を求める

直列共振時は回路のインピーダンスが最も小さくなり、この時の直列共振角周波数ω_1を求めよということですが、直列共振時は $\boxed{Z = R}$ になります。

交流回路には X_L , X_C の要素がありますが、$\boxed{Z = R}$ とするには、X_L と X_C を合成したものが 0 になればいいということです。($X_L + X_C = 0$ になればいい)

(X_L と X_C の値が等しくなり ($X_L = X_C$) 相殺されれば直列共振になり、直列共振時は回路のインピーダンスが最も小さくなる)

では、L_1 , L_2 , C を合成します。

まず、並列になっている C と L_2 を合成する。

C を容量リアクタンスにすると $X_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

L_2 を誘導リアクタンスにすると $X_L = j\omega L_2$

この 2 つの値を、並列回路の抵抗を合成する式 $R = \dfrac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$ を、Z , X_L , X_C に置き換えた式 $Z = \dfrac{X_L \times X_C}{X_L + X_C}$ を使って合成する。($X_C \rightarrow \dfrac{1}{j\omega C}$, $X_L \rightarrow j\omega L_2$ として計算する)

$$Z = \frac{j\omega L_2 \times \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C}}$$

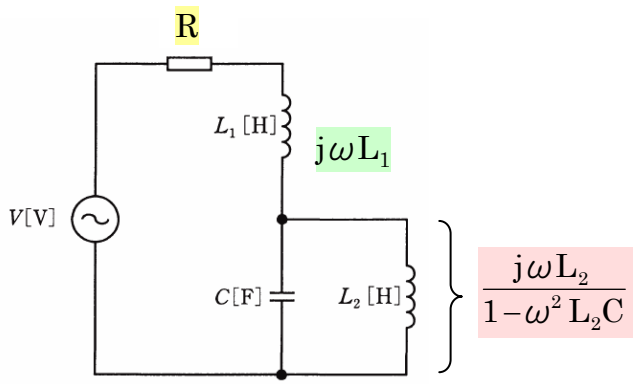
分子と分母に $j\omega C$ をかける

$$= \frac{\left(j\omega L_2 \times \dfrac{1}{j\omega C}\right) \times j\omega C}{\left(j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C}\right) \times j\omega C}$$

$$= \frac{j\omega L_2}{j^2\omega^2 L_2 C + 1}$$

$j^2 = -1$ になる

$$= \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C}$$



回路全体のインピーダンス Z を求める

$$Z = R + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C}$$

$$Z = R + j\omega\left(L_1 + \frac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C}\right)$$

$j\omega L_1 + \dfrac{j\omega L_2}{1-\omega^2 L_2 C}$ を $j\omega$ で括る

X_L と X_C を合成したものが 0 になれば直列共振になるので、 $j\omega\left(L_1 + \dfrac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C}\right)$ が 0 になれば良い（虚数部が 0 になれば良い）。

$j\omega\left(L_1 + \dfrac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C}\right)$ の $L_1 + \dfrac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C}$ が 0 になる式をたてて、これを解く。

$$L_1 + \frac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

この式に各値を代入すれば共振角周波数 ω_1 が求められる。

$R = 1\ \Omega$, $L_1 = 0.4$ mH , $L_2 = 0.2$ mH , $C = 8\ \mu$F を代入

$$\omega = \sqrt{\frac{0.4\text{m} + 0.2\text{m}}{0.4\text{m} \times 0.2\text{m} \times 8\mu}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0.4\times10^{-3} + 0.2\times10^{-3}}{0.4\times10^{-3} \times 0.2\times10^{-3} \times 8\times10^{-6}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0.6\times10^{-3}}{0.4\times0.2\times8 \times 10^{-12}}}$$

$$\omega = \sqrt{937500000}$$

$$\omega \fallingdotseq 3.1\times10^4$$

答　(5)

途中式

$$L_1 + \frac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C} = 0$$

$$\frac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C} = -L_1$$

$$\frac{L_2}{1-\omega^2 L_2 C} = -1\times L_1$$

$$\frac{L_2}{-1\times(1-\omega^2 L_2 C)} = L_1$$

$$\frac{L_2}{\omega^2 L_2 C - 1} = L_1$$

$$L_2 = L_1(\omega^2 L_2 C - 1)$$

$$L_2 = \omega^2 L_1 L_2 C - L_1$$

$$L_1 + L_2 = \omega^2 L_1 L_2 C$$

$$\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C} = \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

直列共振の条件の一つ $\boxed{Z = R}$ について。

直列共振の条件の一つに $\boxed{Z = R}$ があり、これについて $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$ で考えてみます。
※

共振時は $X_L = X_c$ のため $\underline{X_L - X_c = 0}$ になり、

$\underline{X_L - X_c = 0}$ を $Z = \sqrt{R^2 + (\underline{X_L - X_C})^2}$ に代入すると $Z = R$ になる。

$\boxed{X_L - X_c = 0}$

したがって、共振時は $\boxed{Z = R}$ になります。

また、 $\boxed{Z = R}$ のときＺの値は最小になります。

($\boxed{Z = R}$ のときは、 X_L と X_c の成分が加味されないのでＺの値は最小になる)

$\dot{X}_L = j\omega L$, $\dot{X}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$ の関係にあるため、

$\underline{\dot{X}_L - \dot{X}_c = 0}$ は $\underline{j\omega L - \dfrac{1}{j\omega C} = 0}$ と表すことも出来ます。

したがって $j\omega L - \dfrac{1}{j\omega C} = 0$ のとき共振状態になり、このときのωが共振角周波数になります。

また、$j\omega L - \dfrac{1}{j\omega C} = 0$ のとき共振状態であるということは、「虚数部が 0 のとき共振状態になる」とも言えます。（ｊを含む数を虚数と言う）

※　$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ は、直列回路のインピーダンスを求める式